***У Т В Е Р Ж Д А Ю***

Ректор ТГУ им. Г.Р. Державина,
доктор экономических наук, профессор

______________ Юрьев В.М.

«11» 12 2015 года

О Т З Ы В

ведущей организации – Тамбовского государственного университета имени Г.Р. Державина на диссертацию Черниковой Анастасии Сергеевны «Изучение свойств решения задачи о распределении тепла в плоскости с трещиной на стыке двух неоднородных материалов», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Диссертационная работа А.С. Черниковой носит теоретический характер, посвящена теории краевых задач для уравнений с частными производными.

Основной целью работы является исследование решений ряда краевых задач для уравнений эллиптического типа, описывающих распределение температурного поля в сплошной среде с различными ограничениями на коэффициент внутренней теплопроводности. Основной особенностью рассмотренных задач является форма области изменения пространственных переменных, представляющая собой плоскость (или часть плоскости), которая разрезана на две подобласти, заполненные материалами с различными коэффициентами внутренней теплопроводности, с условием трансмиссии на разрезе. На некотором отрезке разреза правые части в условиях трансмиссии отличны от нуля, что моделирует наличие трещины на границе стыка материалов с ненулевой разностью температур и тепловых потоков на ней. Такую часть разреза принято называть трещиной.

Математическим проблемам, описывающим характеристики материалов с трещинами, посвящены многочисленные работы математиков и механиков Z. Hu, Y. Zhou, V. Birman, J. Sladek, V. Sladek, Ch. Zhan, P.A. Martin, J.D. Richardson, L.J. Gray, J. Berger, Y-S. Chan, T. Kaplan, H. Wang, Q-H. Qin, Y. Kang, Н.Б. Ромалис, В.П. Тамуж, В.Е. Петрова. Систематическое изучение краевых задач для уравнений с частными производными, описывающих трещины, проведено в работах С.Е. Михайлова (часть из которых написана в соавторстве с O. Chkadua и D. Natroshvili). Трещина в этих работах трактуется как замкнутая линия на поверхности области, в которой рассматривается решение. На этой линии происходит смена типа краевого условия. Все указанные авторы с помощью различных методов (численно, с помощью оценок в пространствах интегрируемых функций и другими методами), как одну из главных, решали задачу исследования сингулярных составляющих решения (и его производных) в окрестности трещины. Последнее время значительное количество результатов в данной области получено Воронежскими математиками А.В. Глушко, А.С. Рябенко, Е.А. Логиновой.

Таким образом, в диссертации рассмотрены актуальные теоретические проблемы, связанные с исследованием свойств решения краевых задач для эллиптических уравнений в области с разрезом на границе. В то же время, рассматриваемые задачи имеют прикладное значение, результаты работы окажутся востребованными при исследовании проблем теплопередачи в современных неоднородных материалах.

Автором диссертации проведено полное математическое исследование упомянутых краевых задач.

Диссертационная работа содержит три главы.

В первой главе рассматривается задача согласования в плоскости для системы уравнений эллиптического типа с постоянными коэффициентами. Первое уравнение задано в верхней полуплоскости, второе – в нижней; каждое из уравнений описывает стационарное распределение тепла в соответствующей полуплоскости. Связь между решениями устанавливается граничными условиями согласования (трансмиссии по терминологии диссертации) решений и их нормальных производных. На части границы – отрезке $x_2 = 0;\ x_1 \in [-1;\ 1]$ согласование решений нарушается. Сформулируем рассматриваемую задачу более точно.

Для каждой из полуплоскостей записывается уравнение стационарной теплопроводности

$$\frac{\partial^2 u_p(x)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_p(x)}{\partial x_2^2} + k_p \frac{\partial u_p(x)}{\partial x_2} = 0,\ x \in \mathrm{R}^2_{\mathrm{sgn}(3-2p)},\ p = 1;2\,.$$

Граничные условия заданы следующим образом

$$u_1(x_1,+0) - u_2(x_1,-0) = q_0(x_1),\ x_1 \in \mathrm{R}\,,$$

$$\frac{\partial u_1(x_1,+0)}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2(x_1,-0)}{\partial x_2} = q_1(x_1),\ x_1 \in \mathrm{R}\,.$$

Функции $q_0(x_1)$ и $q_1(x_1)$ принадлежат пространству $C^3([-1;1])$, а носители функций $q_0(x_1)$ и $q_1(x_1)$ содержатся в отрезке $[-1;1]$, то есть $\mathrm{supp}\, q_0(x_1) \subseteq [-1;1]$, $\mathrm{supp}\, q_1(x_1) \subseteq [-1;1]$.

Первое из граничных условий описывает разность между температурами верхнего и нижнего берегов трещины, а второе граничное условие – разность между тепловыми потоками через эти берега.

Основным результатом первой главы является формулировка условий на граничные функции $q_0(x_1), q_1(x_1)$, при которых существует классическое, гладкое в области и непрерывное вместе с нормальной производной вплоть до границы решение задачи. При этом исходная задача, во-первых, сводится к обобщенной задаче в $S'(\mathrm{R}^2)$, во-вторых, с помощью метода сведения задачи на границу, строится явное представление решения. Так как была поставлена цель построения классического решения, то у решения и у его производных отсутствуют сингулярные члены в разложениях по расстоянию до концов трещины.

Во второй главе автор проводит работу, направленную на снятие ограничений, которые были наложены в первой главе с целью получения классического решения, а, именно, отказывается от условий обнуления на концах границы функций $q_0(x_1)$ и $q_1(x_1)$ и их производных. Изучается обобщенное решение, которое трактуется, как решение построенной в главе 1 обобщенной задачи. При этом естественным образом у решения возникают сингулярности в окрестностях концов трещины. Для изучения этих особенностей автор предложил и эффективно реализовал довольно сложный технический прием. Конечным результатом является получение сингулярных членов разложения первых производных решения по малому параметру, которым является расстояние до концов отрезка границы-трещины. Попутно доказывается, что само решение ограничено вблизи границы.

В третьей главе диссертации изучается задача о распределении тепла в ограниченной области, представляющей собой квадрат, содержащий разрез-трещину. Главной целью является построение асимптотических разложений компонентов и первых производных ее решения вблизи концов трещины. Если в задаче, рассмотренной в главах 1,2, материалы, заполняющие подобласти (в указанном случае, полуплоскости), имели коэффициенты внутренней теплопроводности вида $c_1 e^{k_1 x_2}$ и $c_2 e^{k_2 x_2}$, где $c_1, c_2$ – произвольные, отличные от нуля константы, а $k_1, k_2$ – произвольные положительные константы, то в исследуемой в главе 3 задаче эти коэффициенты имеют более общий вид: $e^{k_1(x_2)}$ и $e^{k_2(x_2)}$. В третьей главе определяется разность между решением поставленной задачи и задачи, подобной той, что была изучена во второй главе (имеющей специальным образом подобранные коэффициенты дифференциальных уравнений). На основе тщательного анализа, основанного на методе ВКБ и теории рядов Фурье, установлено, что указанная разность является непрерывной вплоть до границ функцией. Отсюда автор делает вывод о совпадении сингулярных компонент асимптотических разложений вблизи концов трещины задачи, поставленной в главе 3, и ранее изученной задачи. Этим определяются сингулярные компоненты решений задачи последней главы.

Все представленные в диссертации результаты являются новыми.

Все поставленные в диссертации задачи исследованы с необходимой полнотой и глубиной. Автор диссертации широко и эффективно использует аппарат математической физики, асимптотические методы исследования интегралов, зависящих от внешних параметров, методы функционального анализа и теории специальных функций.

Отмечая в целом четкость и полноту доказательств, приведенных в диссертации результатов, следует сделать ряд замечаний.

✓ Опечатки: на с. 17, строка 2 сверху, вместо $\dfrac{\partial \tilde{z}_2(x)}{\partial x_2}$ должно быть $\dfrac{\partial \tilde{z}_1(x)}{\partial x_1}$; на с. 81, строка 2 снизу, вместо написанного выражения должно стоять равенство $\dfrac{s_1}{(1-is_1)^2} = \dfrac{i}{1-is_1} - \dfrac{i}{(1-is_1)^2}$.

✓ В леммах 2.2 и 2.6 необходимо указать вид функций $A_1'(s_1)$, $B_1'(s_1)$, $(W_1^0(s_1))''$, $\frac{\partial A_1(s_1,s_2)}{\partial s_2}$, $\frac{\partial^2 A_1(s_1,s_2)}{\partial s_2^2}$, $\frac{\partial^3 A_1(s_1,s_2)}{\partial s_2^3}$, $\frac{\partial^4 A_1(s_1,s_2)}{\partial s_2^4}$.

✓ В определении 0.1 на стр. 8, а не в замечании после этого определения, следовало указать, что $\delta$ – любое положительное число. В таком же определении 1.1 про $\delta$ ничего не сказано, и нет соответствующего замечания.

✓ Для удобства чтения стоило бы привести список обозначений, прежде всего, используемых пространств. Автор описал обозначение $R_+^2$, но не написал, что означает $S'(R^2)$, $C^2(R_+^2)$, $L_1(R_+^2)$, не указал, что черта сверху обозначает, по-видимому, замыкание и т.д.

✓ С точки зрения математической целостности и законченности диссертационной работы было бы уместно включить в текст утверждения о единственности решения поставленных задач.

Высказанные замечания и пожелания не снижают общей высокой оценки диссертационной работы А.С. Черниковой.

Оценивая диссертационную работу в целом, следует, прежде всего, отметить, что работа носит характер законченного математического исследования актуальной задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. Полученные в ней результаты составляют несомненный вклад в развитие математических методов качественного изучения задач, имеющих явную прикладную направленность.

Диссертация содержит точные и подробные ссылки на цитируемую литературу. Основные результаты полностью и своевременно опубликованы в 14 работах, три из них опубликованы в изданиях из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК РФ. Автореферат точно отражает содержание диссертации. Результаты прошли апробацию на конференциях и научных семинарах.

Результаты диссертационной работы А.С. Черниковой могут быть использованы в научных исследованиях, проводимых в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова, Новосибирском государственном университете, Воронежском государственном университете, Санкт-Петербургском государственных университете, Российском университет дружбы народов, Елецком государственном университете имени И.А. Бунина, Тамбовском государственном университете имени Г.Р. Державина.

На основании изложенного считаем, что диссертационная работа А.С. Черниковой соответствует требованиям пункта 9 Положения ВАК РФ о порядке присуждения ученых степеней к кандидатским диссертациям по указанной специальности, а ее автор заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Отзыв составлен директором научно-исследовательского института математики, физики и информатики, профессором кафедры функционального анализа доктором физико-математических наук, профессором Жуковским Евгением Семеновичем.

Отзыв обсужден и одобрен на заседании кафедры функционального анализа Тамбовского государственного университета имени Г.Р. Державина, протокол № 4 от 11 декабря 2015 г.

Жуковский Евгений Семенович
доктор физико-математических наук по специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление,
профессор, директор научно-исследовательского института математики, физики и информатики,
профессор кафедры функционального анализа Тамбовского государственного университета имени Г.Р. Державина,
392000, Россия, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33,
тел. +7(960)6707543, эл. адрес: zukovskys@mail.ru

Заведующий кафедрой функционального анализа,
доктор физико-математических наук, профессор В.Ф. Молчанов

ФГБОУ ВПО "Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина"
Подпись Молчанова В.Ф., Жуковского Е.С.
ЗАВЕРЯЮ
Начальник управления кадров
"11" декабря 2015 г.